Zadatak: 20. ODBIJANJE LOPTE OD PODLOGE (EXP)

U *Zadatku 15* smo proučavali neelastično odbijanja lopte (ili nekog drugog tijela) od podloge, tj. odbijanje uz gubitak energije. Pri tom smo uveli jedan parametar λ, kojim smo označili omjer brzine lopte neposredno *poslije* (v_{n+1}) i *prije* (v_n) udarca o tlo, $v_{n+1} = \lambda v_n$. Parametar λ se dakle može shvatiti kao faktor 'gubitka' brzine, te se njegova vrijednost nalazi u intervalu $0 \leq \lambda \leq 1$.

Pokušajmo provjeriti da li ovakav fizikalni model može opisati realnu situaciju. U tu svrhu, načinimo eksperiment – za njega će vam trebati dobro napumpana lopta (npr. nogometna) ili kuglica od, recimo, čelika ili drveta. Bitno je da se lopta ili kuglica dovoljno puta (više od 7–8 puta) odbije od podloge nakon ispuštanja. To ujedno znači da i podloga treba biti tvrda. Npr., moguće su kombinacije kuglice od čelika koja se odbija od keramičkih pločica, ili od čelične ploče, ili tvrdog drveta. Medjutim, valja paziti i na to da lopta ili kuglica ne budu prelagane – u protivnom značajan utjecaj na gibanje može imati trenje sa zrakom.

Načinite slijedeće:

- Izaberite visinu h_0 s koje ćete puštati loptu ili kuglicu (u daljnjem tekstu:*kuglica*). Po mogućnosti neka ta visina bude oko 1 metar, a svakako veća od pola metra.

- U ovom eksperimentu potrebno je mjeriti niz od pet, šest, pa i više vremenskih intervala u nizu, što nije moguće s običnom štopericom. No, budući da vjerojatno posjedujete računalo, možete napisati mali program koji će registrirati svaki pritisak na neku tipku i zabilježiti pripadno vrijeme. (U *Primjeru* je dân jedan takav program, pisan u QBASICu.)

- Kako bismo provjerili fizikalni model, izmjerit ćemo vremena $t_1, t_2, t_3, \ldots$, vremena prvog, drugog, trećeg ... udarca kuglice o tlo. U tu svrhu, ispustite lopticu s visine h_0 te izmjerite pripadna vremena pri *svakom* udarcu o tlo. Zabilježite koliko je god moguće više vremena. S obzirom da će razmaci izmedju udaraca o tlo biti kratki, možda ćete trebati ponoviti postupak desetak ili više puta, prije nego mjerenja budu zadovoljavajuća. Zamolite nekog da vam pomogne, recimo, da ispušta lopticu. Ako se razumijete u elektroniku, načinite elekotronički sklop s kojim će se moći registrirati zvuk udarca o podlogu. Taj sklop priključite na računalo (npr. na 'paralelni' ili 'serijski port'), te napišite program koji će registrirati vremena kada sklop 'čuje' zvuk.

- Načinite tablicu s 3 stupca:

n	τ_n	$\tau_n\sqrt{\frac{g}{2h_0}}$
1	0	
2		
3		
$\vdots$		

U prvom stupcu je broj udarca (1–prvi udarac nakon ispuštanja, 2–drugi udarac nakon ispuštanja, ...). U drugi stupac upišite izmjerene vrijednost vremena proteklog od *prvog* udarca o tlo (prvi podatak u tom stupcu je zato jednak 0). Treći stupac popunite s izračunatim vrijednostima, pomoću drugog stupca i visine s koje ste ispuštali kuglicu h_0 ($g = 9.81$ m/s^2). Nacrtajte graf na kojem ćete na x-os nanositi vrijednost iz prvog stupca, a na y-os vrijednosti iz trećeg stupca.

- Izvedimo sada izraz za τ_n. Ako preuzmemo oznake iz *Zadatka 15.* onda je po definiciji:

$$\tau_n = T_n - \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Uvrstimo izraz za T_n:

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{1+\lambda-2\lambda^n}{1-\lambda} - \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \\
&= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(\frac{1+\lambda-2\lambda^n}{1-\lambda} - 1\right) = \\
&= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{2\lambda-\lambda^n}{1-\lambda} = \\
&= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}2\lambda\frac{1-\lambda^{n-1}}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Ovo se još može pisati i kao:

$$\tau_n\sqrt{\frac{g}{2h_0}} = 2\lambda\frac{1-\lambda^{n-1}}{1-\lambda}$$

što je upravo razlog zašto smo i uopće uveli i crtali treći stupac u tablici. Naime, ako lijevi stranu gornje jednadžbe označimo s y, a n s x, imamo:

$$y = y(x) = 2\lambda\frac{1-\lambda^{x-1}}{1-\lambda}$$

tj. naše točke na grafu bi trebale slijediti gornju funkciju, s pravilno odabranim λ.

- Sada treba pogoditi parametar λ tako da funkcija $y = y(x)$ najbolje slijedi eksperimentalno odredjene točke. Nažalost, jedini jednostavniji način jest upravo pogadjanje: odaberite jednu vrijednost (recimo $\lambda = 0.7$) i na istom grafu na kojem ste nacrtali eksperimentalne točke, nacrtajte i nekoliko točaka funkcije $y = y(x)$. Ponavljajte to s različitim vrijednostima λ sve dok ne dobijete razumno slaganje izmjerenih točaka i funkcije. I tu vam može pomoći računalo ...

- Ako ste eksperiment pažljivo izveli, krivulja funkcije $y = y(x)$ bi se trebala razmjerno dobro slagati s izmjerenim vrijednostima. Kao konačnu provjeru slaganja fizikalnog modela i 'realnosti', ispustite lopticu s visine h_0 i izmjerite vrijeme od njena ispuštanja pa do potpunog zaustavljanja. To bi se trebalo približno slagati s vrijednošću dobivenom uvrštavanjem λ u izraz za T:
$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$$

Primjer: 20. ODBIJANJE LOPTE OD PODLOGE (EXP)

Pokažimo na primjeru tijek mjerenja ... Autor zadatka je eksperiment izveo s čeličnom kuglicom promjera 7 mm, koja se odbijala od tvrdog drvenog stola, ispuštena s visine od $h_0 = 57$ cm. Za mjerenje niza vremena korišten je jednostavan program napisan u QBASICu 4.5 (link) koji izmjerene vrijednosti sprema u datoteku.

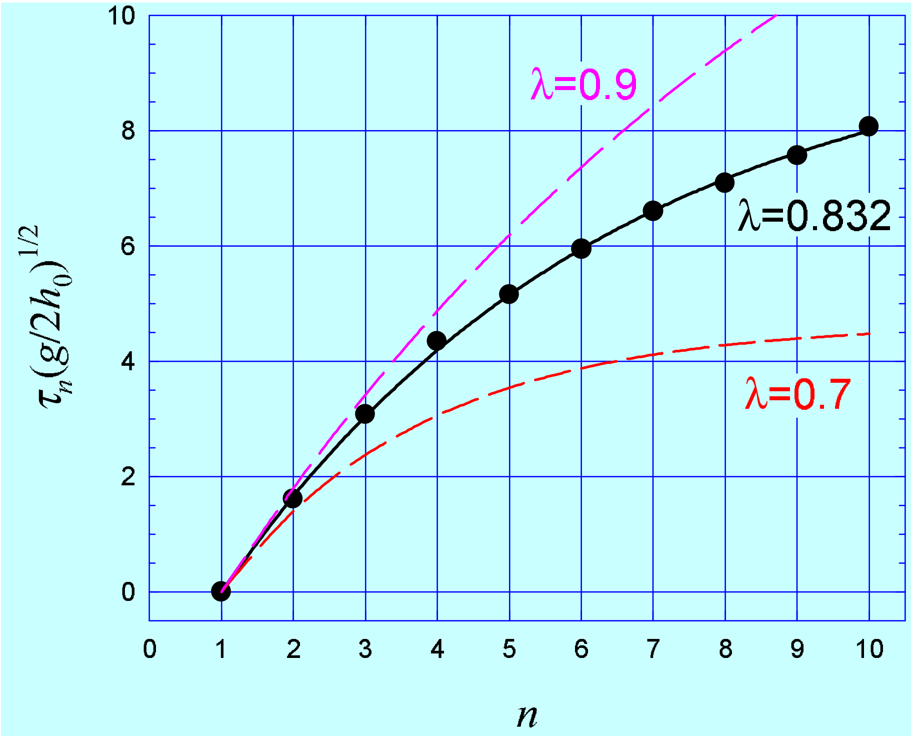
Nakon dvadesetak neuspjelih pokušaja (i traženja 'odbjegle' kuglice ispod namještaja), izmjereno je:

n	τ_n [sek]	$\tau_n\sqrt{\frac{g}{2h_0}}$
1	0	0
2	0.547	1.604
3	1.047	3.071
4	1.480	4.343
5	1.758	5.156
6	2.027	5.947
7	2.250	6.600
8	2.418	7.093
9	2.578	7.563
10	2.750	8.067

U prvom stupcu je broj udarca o tlo, a u drugom pripadno vrijeme. Treći stupac je dobiven množenjem drugog s brojem

$$\sqrt{\frac{g}{2h_0}} = \sqrt{\frac{9.81}{2 \cdot 0.57}} = 2.9335$$

Nacrtajmo graf, koji će na x-osi imati vrijednost is prvog stupca, a na y-osi vrijednosti iz trećeg:



Pune točke predstavljaju vrijednosti iz tablice.

Sad valja naći vrijednost parametra λ kojom ćemo postići najbolje slaganje izmedju izmjerenih vrijednosti i funkcije:

$$y = y(x) = 2\lambda \frac{1-\lambda^{x-1}}{1-\lambda}$$

Nakon nekoliko pokušaja, nadjeno je da $\lambda = 0.832$ 'najrazumnije' slijedi izmjerene točke. Na slici je crnom linijom označen izgled funkcije $y = y(x)$ za tu vrijednost. Usporedbe radi, dotična funkcija je nacrtana za još dvije vrijednosti: $\lambda = 0.7$ (crvena linija) i $\lambda = 0.9$ (ljubičasta linija). Slaganje izmjerenih vrijednosti i funkcije $y = y(x)$ nije potpuno. Medjutim, to se i ne očekuje, budući da se pri mjerenju uvijek javljaju greške, pogotovo pri ovako malim vremenskim razlikama.

Izračunajmo koliko bi dugo, prema našem fizikalnom modelu, kuglica trebala odskakati, ako je ispustimo s visine od 57 cm. Uvrštavanjem upravo nadjene vrijednosti λ u odgovarajući izraz iz *Zadatka 15*, dobivamo:

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \frac{1+\lambda}{1-\lambda} = 3.72 \text{ s}$$

Nije teško vidjeti da je to gotovo 11 puta dulje od vremena koje kuglici treba da padne s iste visine na podlogu. Mjerenjem (štopericom) vremena od trenutka ispuštanja kuglice do njenog potpuno zaustavljanja izmjereno je približno 3.5 sekunde – vrlo dobro slaganje, koje govori u prilog valjanosti našeg fizikalnog modela.