

## Zadatak: 17. KAZETOFONI

Na opremljenijim kazetofonim, te na starijim modelima video uređaja, nalazi se brojač ('counter') koji pokazuje broj okretaja 'prednjeg' kotačića, tj. kotačića *na* koji se traka namata pri normalnom sviranju ('play'). Brojač bi trebao služiti kao indicacija koliko je kazete već odsvirano, odnosno koliko još na nju stane pjesama.

Medjutim, vjerojatno ste i sami primjetili da se brojač brže vrti kada je kazeta na početku i sporije kada je pri kraju. Uzmimo npr. kazetu koja 'traje' 300 brojeva i čiji je početak namješten na 0: vremensko trajanje brojača od 250 do 300 će biti dosta veće od trajanja brojača od 0 do 50. Između ostalog, to znači da brojač *ne* daje vremensku indicaciju proteklog vremena. Recimo, neka je ista kazeta iz prošlog primjera, snimljena do broja 150 – to nikako ne znači da je na toj kazeti ostalo slobodno pola ukupnog vremena, već znatno više.

Razlog zašto brzina brojanja brojača nije konstantna tijekom slušanja kazete, leži u principu funkcioniranja samog kazetofona. Naime, zahtjeva se da magnetska traka na kojoj je snimljen materijal prelazi preko magnetske glave konstantnom (univerzalnom!) brzinom od 4.75 cm/s.

Pokušajte dovesti u vezu brojeve koje pokazuje brojač s trajanjem slušanja kazete. Pritom uzmite u obzir slijedeće pretpostavke:

- Neka kazeta počinje od '0', tj. neka broju 0 odgovara kazeta premotana na početak.
- Uzmite u obzir da magnetska traka preko magnetske glave prelazi *konstantnom* brzinom od  $v_0 = 4.75$  cm/s.
- Promjena brojača za '1' obično odgovara *jednom* okretu 'prednjeg' kotačića. Medjutim, poopćite to tako da jednom okretu kotačića odgovara promjena brojača za  $m$ .
- Magnetska traka, debljine  $d$ , namata se na kotačić promjera  $D$ , u kazeti.

Pokažite da vrijeme proteklo od '0' do nekog broja  $N$  iznosi:

$$T_N = \frac{\pi}{v_0} [D + d((N/m) - 1)] \cdot (N/m)$$

Pokažite da je vrijeme proteklo između broja  $M$  i  $N$  jednako:

$$T_{NM} = T_N - T_M = \frac{\pi}{v_0} \left[ D + d \left( \frac{N+M}{m} - 1 \right) \right] \frac{N-M}{m}$$

Za praktičnu primjenu ovih izraza trebalo bi poznavati promjer kotačića  $D$  i debljinu magnetske trake  $d$ . Promjer  $D$  se rastavljanjem kazete još i može izmjeriti, ali za debljinu trake  $d$  bi vam trebao posebni uređaj koji mjeri vrlo male dimenzije.

Ipak, obje se te veličine mogu odrediti i manje ‘destruktivnim’ metodama bez rastavljanja kazete i bez kontakta s magnetskom trakom. Kako – pogledajte *Zadatak XX*.

### Hint: 17. KAZETOFONI

**Pomoć:** Promatraje duljinu namotane trake nakon što se ‘prednji’ kotačić okrene za 1, 2, ...,  $N$  krugova. Iskoristite činjenicu da je brzina trake preko magnetske glave konstanta. Upotrijebite izraz za sumu aritmetičkog niza:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Rješenje: 17. KAZETOFONI

Uzmimo da je kazeta premotana na početak, te da brojač pokazuje ‘0’. Duljina namotane trake nakon prvog okreta prednjeg kotačića iznosi  $l_1 = \pi D$ . Za drugi okret nam treba  $l_2 = \pi(D + 2d)$ , budući da se sada traka namata na kotačić na kojem je već jedan namot trake. Za treći okret nam treba  $l_3 = \pi(D + 4d)$  trake. Vidimo pravilo po kojem se može dobiti duljina namotane  $l_n$  trake za bilo koji okret kotačića:

$$l_n = \pi[D + 2(n-1)d]$$

gdje  $n$  predstavlja broj okreta ‘prednjeg’ kotačića kazete.

Ukupna namotana duljina trake  $L_n$  nakon  $n$  okreta kotačića iznosi:

$$\begin{aligned} L_n &= l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n \\ &= \pi D + \pi(D + 2d) + \pi(D + 4d) + \dots + \pi[D + 2(n-1)d] \\ &= \pi \left\{ D \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_n + 2d[0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)] \right\} \end{aligned}$$

Lako je vidjeti da u prvoj zagradi ima  $n$  jedinica, dok druga zagrada predstavlja zbroj prirodnih brojeva od 1 do  $n-1$  (nula na početku je irelevantna). Upotrebom izraza za sumu aritmetičkog niza slijedi:

$$\begin{aligned} L_n &= \pi \left\{ nD + 2d \frac{(n-1)n}{2} \right\} \\ &= \pi [D + d(n-1)]n \end{aligned}$$

Traka duljine  $L_n$  je prolazila konstantnom brzinom  $v_0$  preko magnetske glave kazetofona. Prema tome, za to joj je trebalo vrijeme  $T_n$ . Budući je  $v_0 = L_n/T_n$  slijedi:

$$T_n = \frac{\pi}{v_0} [D + d(n-1)]n$$

Gornji izraz daje proteklo vrijeme u ovisnosti o broju okretaja  $n$  'prednjeg' kotačića kazete. Ako se za jedan okret tog kotačića brojač promijeni za  $m$ , onda će promjena brojača za  $N$  odgovarati  $N/m$  okreta kotačića. Prema tome, dobivamo konačni izraz:

$$T_N = \frac{\pi}{v_0} [D + d((N/m) - 1)](N/m)$$

Uočite kvadratičnu ovisnost  $T_N$  o  $N$ .