Zadatak: 16. IZMJERITE POLUMJER ZEMLJE

Iako to možda čudno zvuči, i *vi* možete relativno jednostavno izmjeriti polumjer Zemlje. Za to vam trebaju dva podatka: duljina Sunčeve sjene kada je ona najkraća, na dva mjesta na Zemlji (u istom danu), po mogućnosti što udaljenija (u smjeru meridijana).

Označimo s l_1 i l_2 duljine sjena okomito postavljenih štapova visokih h_1 i h_2 u momentu kada je njihova sjena najkraća. Pokažite da se tada polumjer Zemlje R može dobiti iz:

$$R = \frac{L}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{L}{\operatorname{arctg} \dfrac{l_2/h_2 - l_1/h_1}{1 + \dfrac{l_1 l_2}{h_1 h_2}}}$$

Ovdje je L udaljenost medju mjestima, u smjeru meridijana, a φ_1 i φ_2 kutevi pod kojem zrake Sunca padaju na Zemlju (vidi sliku). Pritom pretpostavite da su zrake Sunca koje dolaze do Zemlje, zbog njihove medjusobne udaljenosti, medjusobno paralelne.

Ipak, s gornjim izrazom za R treba biti oprezan. Da bi se dobila smislena vrijednost, potrebno je što točnije odrediti razliku kuteva $\varphi_2 - \varphi_1$ tj. razliku $l_2/h_2 - l_1/h_1$. To se može postići vrlo preciznim mjerenjem pojedinih kuteva tj. pojedinih omjera l_1/h_1 i l_2/h_2, što nije jednostavno. S druge strane, točnost razlike kuteva će biti to veća što je medjusobna udaljenost mjesta L veća: npr. ona ne bi trebala biti manja od 100 km, najbolje bi bilo kada bi ona bila oko 1000 km ili veća. To znači: ako poznate nekoga u npr. Münchenu – zamolite ga da vam pomogne. Ili, pokušajte zamoliti nekoga preko Interneta da vam izmjeri dio potrebnih veličina.

Kao kuriozitet, napomenimo da su upravo na ovaj način stari Grci (Eratosten, 275-195 p.n.e.) prvi izmjerili polumjer zemlje R, te time indirektno 'potvrdili' da je Zemlja okrugla!

Hint: 16. IZMJERITE POLUMJER ZEMLJE

Pomoć: Upotrijebite standardni izraz za duljinu kružnog luka.

Rješenje: 16. IZMJERITE POLUMJER ZEMLJE

Promotrimo sliku (slika) detaljnije; očito vrijedi

$$L = R\Delta\varphi = R(\varphi_2 - \varphi_1)$$

jer je duljina kružnog luka jednaka produktu polumjera i kuta koji taj luk zatvara.

Kuteve φ_1 i φ_2 možemo odrediti tako da na vodoravnu podlogu okomito zabijemo štapove visine $h_{1,2}$ i izmjerimo njihove duljine sjena $l_{1,2}$. Konstrukcijom *sličnog* trokuta na papiru možemo izmjeriti pojedini kut (u radijanima!), ili se možemo poslužiti trigonometrijom (slika):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \operatorname{arctg}(l_2/h_2) - \operatorname{arctg}(l_1/h_1)$$

S obzirom da vrijedi:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

gornji izraz se može transformirati u:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{l_2/h_2 - l_1/h_1}{1 + \dfrac{l_1 l_2}{h_1 h_2}}$$

što potvrdjuje formulu danu u zadatku.

Ovdje nekoliko stvari treba imati na umu. Kako je bitno što točnije odrediti razliku kuteva $\varphi_2 - \varphi_1$, preporuča se upotreba trigonometrije, te što točnije odredjivanje duljina $h_{1,2}$ i $l_{1,2}$. To ujedno znači da posebnu pažnju treba posvetiti činjenici da treba izmjeriti *najkraću* duljinu sjene, npr. započeti mjeriti duljinu petnaestak minuta prije očekivanog momenta, uvjeriti se da je duljina zaista poprimila minimalnu vrijednost, te tu vrijednost zabilježiti.

I na kraju, malo je vjerojatno da će vaša 'kontakt-osoba' u drugom mjestu biti na istom meridijanu kao i vi. U tom slučaju, za udaljenost L valja uzeti medjusobnu udaljenost točaka dobivenih projekcijom na jedan meridijan (vidi sliku).