Zadatak: 15. ODBIJANJE LOPTE OD PODLOGE

Svi znamo da se nogometna lopta ispuštena s visine H odbija od zemlje, te zbog gubljenja energije pri svakom dodiru sa tlom, nakon nekoliko odskoka stane. Jedan od načina da se to opiše jest da se uvede (fizikalni) model u kojem se pretpostavlja da su brzine tik prije i nakon udarca o tlo povezane. Npr., može se uzeti veza $v_{n+1} = \lambda v_n$. Ovdje smo s v_n i v_{n+1} označili brzinu lopte neposredno *prije* i *poslije* udarca o tlo. λ predstavlja faktor 'gubitka' brzine ili kinetičke energije, te se njegova vrijednost nalazi u intervalu $0 \leq \lambda \leq 1$.

Slučaj $\lambda = 1$ odgovara odbijanju bez gubitaka, tj. kako su brzine prije i poslije udarca o tlo jednake, skakanje lopte bi se trebalo nastaviti u nedogled. S druge strane, $\lambda = 0$ će značiti da će lopta pasti na tlo i neće odskočiti.

Stoga očekujemo da će realna situacija biti opisana faktorom λ *izmedju* 0 i 1.

Pretpostavimo sada da loptu ispuštamo s visine $H = h_0$. Odredite slijedeće:

- Nadjite brzinu v_0 neposredno prije udara o tlo i brzinu v_1 nakon udara o tlo.

- Nadjite brzine v_2, v_3, ... nakon drugog, trećeg, ... udara o tlo. Izrazite brzinu v_n nakon n udara lopte o tlo, pomoću osnovnih veličina h_0, g, λ i n.

- Nadjite visinu h_1, h_2, ... koju lopta postiže nakon prvog, drugog, ... udara o tlo. Nadjite visinu h_n koju lopta postiže nakon n udara o tlo i izrazite je pomoću osnovnih veličina.

- Odredite vrijeme t_1, t_2, ... koje prodje izmedju prvog i drugog, drugog i trećeg, ... udara o tlo. Nadjite vrijeme t_n koje prodje izmedju n-tog i $n+1$-og udara o tlo i izrazite je pomoću osnovnih veličina.

- Uočite ovisnosti v_n, h_n i t_n o broju udara o tlo n – one su tipa $const. \times \lambda^n$. Skicirajte na grafu tu ovisnost: na apscisu nanesite n, a na ordinatu λ^n za nekoliko vrijednosti λ (npr. $\lambda = 3/4, 1/2, 1/4...$).

- Pomoću dobivenog izraza za t_n odredite vrijeme T_n potrebno za n odskoka lopte (računajući od puštanja lopte s visine h_0). Ovdje će vam trebati izraz za sumu geometrijskog niza:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

- Možete li pokazati da kada broj odskoka n teži u beskonačnost, ukupno vrijeme T_n teži u konačnu vrijednost T? Uočite da to znači, u okviru našeg modela, iako je broj odskoka *beskonačan*, lopta će se smiriti za *konačno* vrijeme.

U zadatku zanemarite trenje lopte sa zrakom.
Napomena. Ovaj model se može provjeriti i eksperimentalno - vidi *Zadatak XX*.

Hint: 15. ODBIJANJE LOPTE OD PODLOGE

Pomoć: Upotrijebite standardne izraze za okomiti hitac, tj. za slobodni pad. Za odredjivanje v_n, h_n i t_n, raspišite nekoliko prvih za $n = 1,2,3...$ i uočite pravilnost. Takodjer, primjetimo da kako n postaje veći i veći, λ^n postaje sve manje i manje (pod uvjetom da je $\lambda < 1$). U graničnom slučaju kada n ode u beskonačno, možemo uzeti da λ^n ode u nulu.

Rješenje: 15. ODBIJANJE LOPTE OD PODLOGE

Rješavamo zadatak, točku po točku:

- Standardni izraz za slobodni pad daje brzinu lopte neposredno prije udara o tlo: $v_0 = \sqrt{2gh_0}$. Iz uvjeta zadatka nalazimo brzinu lopte neposredno nakon (prvog) odbijanja: $v_1 = \lambda v_0 = \lambda\sqrt{2gh_0}$.

- Zbog generalnog odnosa $v_{n+1} = \lambda v_n$ možemo pisati $v_2 = \lambda v_1 = \lambda^2\sqrt{2gh_0}$ i $v_3 = \lambda v_2 = \lambda^3\sqrt{2gh_0}$. Nije teško uočiti pravilnost:

$$v_n = \lambda^n\sqrt{2gh_0}$$

- Nakon odbijanja lopte od tla brzinom v_1, visina koju ona postiže iznosi $h_1 = v_1^2/2g = \lambda^2 h_0$. Analogno: $h_2 = v_2^2/2g = \lambda^4 h_0$. Vidimo pravilnost, pa nije teško zaključiti:

$$h_n = \frac{v_n^2}{2g} = \lambda^{2n} h_0$$

- Vrijeme izmedju prvog i drugog odbijanja jednako je $t_1 = 2 \cdot v_1/g = 2\lambda\sqrt{2h_0/g}$. Faktor 2 dolazi zbog toga što lopta ide i gore i dolje. Slično tome, $t_2 = 2v_2/g = 2\lambda^2\sqrt{2h_0/g}$. Kao i prije, dobiva se:

$$t_n = 2v_n/g = 2\lambda^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

- Vidi sliku: (slika)

- Vrijeme potrebno za n odskoka lopte jednako je:

$$T_n = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}$$

Uvrštavajući izraze za $t_{1,2,\ldots}$ to se može pisati i kao:

$$\begin{aligned} T_n &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + 2\lambda\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + 2\lambda^2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \cdots + 2\lambda^{n-1}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left[\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\right] = \\ &= 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\frac{1+\lambda-2\lambda^n}{1-\lambda} \end{aligned}$$

- Kada n postaje sve veći i veći, λ^n postaje sve manji i manji, uz uvjet $0 \leq \lambda < 1$. U graničnom slučaju kada n teži u beskonačno, λ^n teži u nulu, tako da ukupno vrijeme T iznosi:

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

Zaista vidimo da iako je broj odskoka beskonačan, vrijeme T do zaustavljanja lopte je konačno.