

Zadatak: 14. (ZLATNA) PIRUETA

Jeste li ikada uočili tehniku kojom klizač (ili klizačica), dok izvodi piruetu, postiže srazmjerno velike brzine okretanja: najprije se zavrti raširenih ruku brzinom ω_1 , i nakon toga skupljanjem ruku uz tijelo poveća brzinu na ω_2 (slika).

1. Nadjite omjer ω_2/ω_1 koji klizač postiže tim postupkom. Trup tijela klizača aproksimirajte valjkom promjera $D = 30$ cm, a njegove ruke valjcima promjera $d = 10$ cm i duljine $l = 60$ cm. Osim toga, uzmite da masa ruku $2 \cdot m$ čini 7% ukupne mase klizača.
2. Usporedite kinetičke energije vrtnje *prije* i *poslije* skupljanja ruku klizača. Otkuda je došao rad potreban za povećanje kinetičke energije?

Zanemarite trenje.

Hint: 14. (ZLATNA) PIRUETA

Pomoć: Promatrajte zakon očuvanja kutne količine gibanja $L = I\omega$.

Rješenje: 14. (ZLATNA) PIRUETA

Rješenje: 1. Kako nema vanjske sile koja djeluje na klizača u smjeru vrtnje, kutna količina gibanja je pri skupljanju ruku očuvana:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Odatle slijedi: $\omega_2 = (I_1/I_2)\omega_1$.

Sada još valja naći momente inercije I_1 i I_2 : iz slike a) se vidi (slika):

$$I_1 = \frac{1}{2}M \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left[m \left(\frac{D+l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m \left(l^2 + 3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) \right]$$

Prvi pribrojnik predstavlja moment inercije trupa tj. valjka oko njegove osi, dok je u uglatoj zagradi moment inercije ruke. Slično vrijedi za slučaj kada klizač ima skupljene ruke (slika b)):

$$I_2 = \frac{1}{2}M \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left[m \left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right]$$

Kombiniranjem izraza i (podužim) sredjivanjem, dobivamo traženi omjer kutnih brzina:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + \frac{m}{M} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{l}{D}\right)^2 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{l}{D}\right)^2 \right]}{1 + \frac{m}{M} \left[2 \left(\frac{d}{D}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{d}{D}\right)^2 \right]}$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti dobivamo $\omega_2/\omega_1 = 2.654$. Omjer m/M smo, dakako, našli iz činjenice da je $m/(M+m) = 7\%$.

2. Označimo s ΔE razliku kinetičkih energije *prije* i *poslije* skupljana ruku:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

To se može pisati i kao:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right)$$

S obzirom da je $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, slijedi:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$$

Kako je $\omega_2/\omega_1 > 1$, znači da je $\Delta E < 0$, tj. potrebno je uložiti energiju ili izvršiti rad pri skupljanju ruku. Očito, taj rad je izvršio klizač i to svladavajući inercijalnu ('centripetalnu') silu snagom svojih mišića.