Zadatak: 10. MADJIONIČAR U KUĆI

Evo jednog 'trika' kojeg možete načiniti i u kućnoj radinosti: pripremite staklenu valjkastu čašu manjeg promjera i tanje stijenke, i komad običnog papira (npr. iz bilježnice za fiziku) ili tanke, lagane, ravne i tvrde plastike kvadratnog oblika, stranice nešto veće od promjera čaše. Napunite čašu vodom malo 'preko vrha' (tako da površinska napetost onemogućuje vodi da se prelije). Pripremljeni komad (suhog) papira pažljivo stavite na čašu i lagano pritisnite na rub čaše - pri tom vam može iscuriti malo vode iz čaše. S dlanom jedne ruke lagano pritišćite papir, a drugom primite čašu i okrenite je naopako (slika). Pažljivo odmaknite dlan s papira i čudo je tu: papir nije otpao, voda ostaje u čaši.

1. Zašto voda nije iscurila iz čaše? Kako velika čaša može biti da bi trik uspio? (Zanemarite masu papira, pretpostavite da papir nije savitljiv, te zanemarite eventualne efekte privlačenja zbog površinske napetosti vode.)

2. Da li bi isti trik, uz iste pretpostavke, uspio i sa čašom koja je djelomično napunjena vodom?

3. Pokažite da je, ako se pretpostavi da se papir može malo saviti, trik ipak moguć i sa djelomično napunjenom čašom. Uzmite pri tom da je dodatni volumen zbog deformacije papira jednak $\delta \cdot S$ gdje je S površina presjeka čaše, a δ mala veličina. Nadjite maksimalnu moguću količinu zraka u čaši da bi se trik uspješno izveo. Za primjer uzmite čašu visine 18cm, a za malu veličinu $\delta = 0.5$mm.

Hint: 10. MADJIONIČAR U KUĆI

Pomoć: Proučite ukupnu silu koja djeluje na papir: dio od vode, dio od tlaka zraka.

Rješenje: 10. MADJIONIČAR U KUĆI

Rješenje: 1. Kada je čaša puna, onda na papir djeluju dvije sile: tlak zraka (prema gore) i težina vode (prema dolje) (slika). Ukupna sila na papir jednaka je njihovoj razlici:

$$F_u = p_{at}S - \rho SHg$$

gdje je p_{at} atmosferski tlak, S površina presjeka čaše, H visina vode u čaši i ρ i g gustoća vode i ubrzanje sile teže.

Najveća čaša bit će ona čaša za koju je F_u jednak nuli. Rješavanjem jednadžbe, te uvrštavanjem $p_{at} = 10^5$Pa, $g = 10$m/s^2 i $\rho = 10^3$kg/m^3 dobivamo:

$$H_{max} = \frac{p_{at}}{\rho g} = 10\text{m}$$

Uočimo, takodjer, da je presjek površine čaše u ovom slučaju proizvoljan.

2. Ne bi. Za razliku od vode koja je praktički nestlačiva, zrak se lako može ekspandirati, što bi omogućilo odvajanje papira od ruba čaše i istjecanje vode.

3. Sada čaša nije puna vode, ali je ravnoteža ipak moguća: za dovoljno male deformacije papira podtlak zraka u čaši će doprinositi sili koja drži papir (vidi sliku). U ravnoteži (slika b) na papir djeluje izvana atmosferski tlak p_{at}, a iznutra težina vode i unutarnji tlak $p_{at} - \Delta p$:

$$p_{at}S = (p_{at} - \Delta p)S + \rho S(H-h)g$$

Tlak zraka u čaši možemo naći ako pretpostavimo da se prilikom okretanja čaše njegova temperatura ne promijeni, tj. ako se radi o izotermnom procesu. Tada vrijedi:

$$p_{at}Sh = (p_{at} - \Delta p)(Sh + S\delta)$$

Uvrštavanjem u gornju formulu i sredjivanjem dobivamo:

$$p_{at} = p_{at}\frac{h}{h+\delta} + \rho(H-h)g$$

Slijedi:

$$h^2 - h(H-\delta) + \delta(\frac{p_{at}}{\rho g} - H) = 0$$

Od dva rješenja te kvadratne jednadžbe $h_{1,2}$ odabiremo ono koje zadovoljava $h \longrightarrow 0$ kada $\delta \longrightarrow 0$:

$$h = \frac{H-\delta}{2}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{4\delta(p_{at}/\rho g - H)}{(H-\delta)^2}}\right\}$$

Uočite da i ovdje dobiveni rezultat ne ovisi o presjeku čaše. U našem slučaju se izraz može pojednostavniti budući da je $p_{at}/\rho g \gg H$ i $H \gg \delta$:

$$h \simeq \frac{H}{2}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4\delta p_{at}}{\rho g H^2}}\right\}$$

Uvrštavanjem se dobiva $h \simeq 3.4$cm.