

# PRAVILNOST ORBITALNIH RADIJUSA PLANETA I NJIHOVIH GLAVNIH SATELITA

Antun Rubčić i Jasna-BaturiĆ-Rubčić

Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički zavod, Zagreb

## SAŽETAK

Orbitalni radijusi planeta u gibanju oko Sunca i satelita oko matičnih planeta Jupitera, Saturna i Urana predstavljeni su kvadratičnom funkcijom  $r_n = r_1 n^2$ , gdje je  $n = 1, 2, 3 \dots$  a  $r_1$  je radijus prve orbite, zavisan o sustavu. Prva bitna pretpostavka je da su terestrički i jovijanski planeti dva nezavisna sustava, a druga je pretpostavka da specifična kutna količina gibanja podliježe „kvantizaciji“. Pokazuje se da i  $r_1$  mora biti kvantiziran s dodatnim cijelim brojem  $k = 1, 2, 3 \dots$  što, osim kvadratičnog zakona za radijuse, daje i protežnost sustava. Tako se dani gravitacijski sustav karakterizira s nizom cijelih brojeva  $n$ , koliko ima tijela, i s određenom vrijednosti cijelog broja  $k$ . Radijusi orbita su dani formulom  $r_n = \frac{1}{v_o^2} GM \frac{n^2}{k^2}$ , gdje je  $M$  masa centralnog tijela,  $G$  je gravitacijska konstanta, a  $v_o = 24$   $\text{kms}^{-1}$ . Ophodna vremena, kutne količine gibanja i orbitalne brzine također su „kvantizirane“ s navedenim parametrima. Pravilnost orbitalnih radijusa bit će diskutirana i u vezi s Keplerovim zakonima. Kvadratični zakon bit će primijenjen i na planete dvaju pulsara, te na novootkrivene planete nekih zvijezda.

## 1. UVOD

Na temelju Kopernikove ideje, da je Sunce centralno tijelo u našem planetarnom sustavu, oko kojega se gibaju svi planeti, i na temelju astronomskih opažanja, bilo je moguće odrediti vrijednosti karakterističnih parametara putanja. To su ponajprije udaljenosti planeta od Sunca i njihovo vrijeme obilaska. Kepler je utvrdio da su putanje planeta elipse, te da se Sunce nalazi u žarištu putanja svih planeta. Srednja udaljenost planeta od sunca jednaka je velikoj poluosi elipse. Oblik elipse opisuje se matematičkom veličinom, koja se naziva linearni ekscentricitet. Ekscentricitet je nula za kružnu putanju, a kružnica prelazi u elipsu, koja je sve više izdužena kako ekscentricitet raste od nule prema jedinici. Parabola je definirana s ekcentricitetom jednakom jedinici, a za vrijednosti veće od jedan putanja je hiperbolična. Planete imaju relativno male ekscentricitete pa se u prvoj aproksimaciji njihove putanje mogu smatrati kružnim, radijusa jednakim velikim poluosima.

Kada su ustanovljene udaljenosti planeta od Sunca utvrđen je i poredak planeta. Najbliži je Merkur, a zatim slijede Venera, Zemlja i Mars, nazvani zajedničkim imenom terestrički planeti. Nadalje se nailazi na asteroidni pojas malih tijela od kojih je najveći Ceres. Zatim slijede redom velike jovijanske planete Jupiter, Saturn, Uran i Neptun, te još jedan mali planet Pluton. Usavršavanjem teleskopa određivani su i radijusi putanja satelita pojedinih planeta, a i u ovo naše vrijeme otkrivaju se nova tijela u Sunčevom sustavu bilo teleskopima bilo svemirskim sondama, koje na svojim putovanjima otkrivaju nove detalje. Podaci za orbitalne udaljenosti, periode revolucije i mase planeta dani su u Tabeli.

Poznavanjem udaljenosti planeta od Sunca pojavljuje se prirodna želja za iznalaženjem njihove pravilnosti, ako ona uopće i postoji. Tako su Titius (1772.god.) i Bode (1776.god.) pokušali opisati porast radiusa putanja pridruživši svakom planetu cijeli broj  $n$ . Svoja razmatranja obuhvatili su formulom  $r_n = A + BC^n$  gdje su A,B,i C konstante. Ova formula

zove se Titius-Bodeov zakon i još uvijek se citira u udžbenicima astronomije, iako su poslije njih mnogi autori postigli uvjerljivije i točnije zakonitosti. Ipak ostalo je tradicionalno da se svi planeti smatraju jednakopravnim, te da  $n$  raste od 1 do 9, na primjer. Malo drukčiju formulaciju je iskazao Blagg (1913.god.) tj.  $r_n = AB^n f(n)$  ( $n=-2,-1, 0,1,\dots,7$ ), a  $f(n)$  je jedna oscilirajuća funkcija. Gulag (1972.god.) je predložio izraz  $r_n = (n+1/2)r_0$  gdje je na primjer za satelite Urana,  $n=7$  za Mirandu, 12 za Ariel, 15 za Umbriel i čak 34 za Oberon. U zadnjih 15 god. istraživao se zakon vezan za kvantnu fiziku i korišteni su različiti pristupi (Qing-xiang,1993), Agnese i Festa 1997., Nottale 1996.god., i dr.) Autori ovog članka su mišljenja da je nedostatak u početnim pretpostavkama upravo baziran na želji da se svi planeti tretiraju ravnopravno tj. sa sukcesivnim porastom broja  $n$ , od Merkura pa sve do Plutona. U radovima Rubčić&Rubčić (1995., 1996.,1998. i 1999.god.) odstupilo se od spomenute pretpostavke tako da se terestrički planeti i jovijanski planeti smatraju zasebnim sustavima. Terestrički planeti imaju jedan do dva reda veličine manju masu od jovijanskih. Gustoća terestričkih planeta je oko  $5 \text{ g cm}^{-3}$ , jer su građeni od metalnih i mineralnih tvari, a jovijanski planeti imaju gustoću oko  $1 \text{ g cm}^{-3}$ , jer su građeni od kondenziranih plinova. Ustanovljeno je, da se udaljenosti terestričkih i jovijanskih planeta od Sunca, te udaljenosti satelita od svojih matičnih planeta Jupitra, Saturna i Urana mogu opisati jednostavnim zakonom  $r_n = r_1 n^2$  gdje su  $n$  cijeli sukcesivni brojevi, koji ne moraju početi s 1. Uzrok tome je da su neke orbite satelita blizu planeta zabranjene zbog Rocheove granice a blizu Sunca zbog „rotacione granice“, što će se obrazložiti kasnije. Zanimljivo je spomenuti da je Kepler pokušao utvrditi svoj IV. zakon raspodjele putanja služeći se geometrijskim razmatranjima. Tako je oko putanje Jupitra opisao istostranični trokut, a zatim kroz vrhove trokuta opisao kružnicu, što je trebalo biti radijus Saturnove putanje. I doista slaganje s opažanjima bilo je zadovoljavajuće, ali se dalje nije moglo, jer geometrijski model nije bio dostatan za opis radijusa putanja planeta.

## 2. ZAKONI KEPLERA I NEWTONA

Keplerov prvi zakon spomenuli smo u uvodu. Planeti se gibaju po elipsama, a Sunce je u jednom žarištu (fokusu).

Drugi zakon utvrđuje da su u jednakim vremenskim intervalima, površine koje prebriše radijus, jednake. Taj zakon je u svezi sa sačuvanjem kutne količine gibanja.

Treći zakon daje relaciju između kvadrata ophodnog vremena  $T$  planeta i kubusa srednje udaljenosti  $r$  od Sunca i to u obliku

$$T^2 = C r^3$$

Kepler nije mogao povezati konstantu  $C$  s nekim parametrima sunčevog sustava, jer nije poznao zakon gravitacijskog međudjelovanja dvaju nebeskih tijela. Keplerov zakon se lako provjeri znajući eksperimentalne podatke. Tako možemo korelirati  $\log r$  s  $\log T$ . Ova korelacija i podaci dani su na Sl.1. (Slično se može načiniti i za satelite). Linearna regresija daje najbolje podešavanje pravca na eksperimentalne točke. Jednadžba pravca je

$$\log r = 6.167 + 0.667 \log T = 6.167 + \log T^{2/3}$$

Ovu jednadžbu antilogaritmiramo i kubiramo, pa se dobija

$$T^2 = C' r^3$$

Konstantu  $C'$  može se odrediti koristeći Newtonov zakon gravitacije i drugi zakon mehanike

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{i} \quad F = ma$$

Ovdje je  $F$  sila međudjelovanja,  $G$  univerzalna konstanta gravitacije,  $M$  masa centralnog tijela,  $m$  masa planeta(satelita) i  $a$  je akceleracija. Kod jednolikog kružnog gibanja akceleracija je

$$a = v^2/r$$

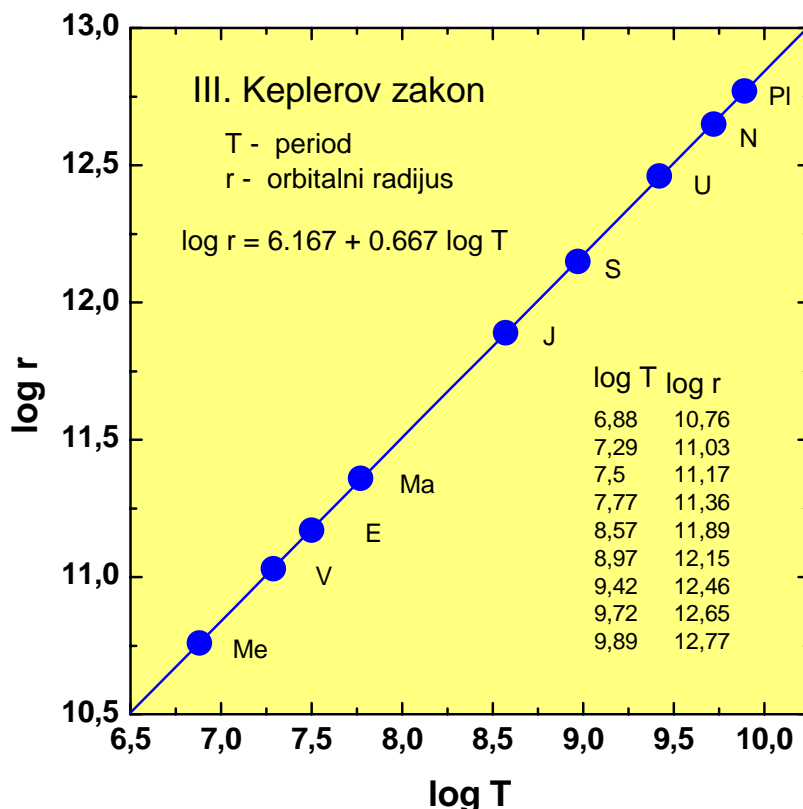
i brzina

$$v = 2r\pi / T$$

Koristeći posljednje četiri jednadžbe slijedi

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = 2.96 \cdot 10^{-19} r^3$$

Član 6.167 u linearnoj regresiji treba antilogaritmirati, zatim kubirati i uzeti recipročnu vrijednost. Dobija se  $3.15 \cdot 10^{-19} \text{ (s}^2\text{m}^{-3}\text{)}$ , što je dobro uz aproksimaciju koju smo u računu uzeli.



Sl.1 Ovjerovljenje III. Keplerovog zakona  $T^2 = konst r^3$ .

Važno je uočiti da se uz proizvoljan izbor perioda  $T$  može odrediti i pripadna udaljenost  $r$ . To znači, na primjer, ako se želi lansirati satelit na neku određenu visinu iznad zemlje, mora se satelitu dati takva tangencijalna brzina  $v$ , da period  $T$  bude u slaganju s trećim Keplerovim zakonom. Još jedanput naglasimo: nema nikakvih ograničenja na udaljenost  $r$ , ona se doista može proizvoljno odabrati

### 3. BOHROV MODEL ATOMA VODIKA

Bohrov model slijedi Rutherfordovo saznanje, bazirano na eksperimentu, da se atom sastoji od malene teške jezgre i lakih elektrona, koji se gibaju oko jezgre. Jezgra je veoma malena, oko 10000 manjeg promjera od atoma. Masa  $m_e$  jednog elektrona je oko 1840 puta manja od protona. Vodikov atom je najjednostavniji atom i sastoji se samo od protona, kao jezgre i jednog elektrona, koji kruži oko protona. Proton ima pozitivni elementarni naboj  $e$ , dok elektron ima negativni elementarni naboj. Što drži elektron u gibanju oko jezgre? Elektron je podvrgnut privlačnoj sili protona prema Coulombovu zakonu

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$\varepsilon_0$  je permitivnost vakuuma..

Uz pretpostavku da je elektron smješten na kružnu putanju slijedi  $F = m_e v^2 / r$  i izjednačavanjem prethodnih formula izlazi

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}$$

Brzina je dan s  $v = \frac{2r\pi}{T}$  i posljednja jednadžba prelazi u

$$T^2 = \frac{16\pi^3 \varepsilon_0 m_e}{e^2} r^3 = C r^3$$

Konstantu  $C$  možemo izračunati, jer su sve veličine poznate iz drugih izvora. Očevidno smo dobili analogan rezultat onome za gravitacijski sustav, tj. III. Keplerov zakon. I sve što je rečeno prije vrijedi i sada. Očekujemo da udaljenost  $r$  elektrona od protona (jezgre) bude proizvoljna, samo ako je u slaganju s periodom  $T$ . Ali nije tako!! Zašto??

Eksperimentalni spektar vodikova atoma nije kontinuiran, nego linijski, diskretan. Zato se u vidljivom dijelu spektra opažaju samo četiri linije, nazvane Balmerova serija. To znači da atom emitira samo određene energije svjetlosti, tj. fotone. A zašto bi fotoni bili određene energije? Bohr je (1913.god.) zamislio da se elektron ne može kretati po bilo kojim kružnicama-putanjama, nego samo po nekima. Tada bi prijelaz elektrona s jedne putanje na drugu emitirao one energije, dobivene kao razlike energija, koje pripadaju elektronu na određenim putanjama. Naime, kako radijus putanje raste tako i kinetička energija pada, jer je brzina kruženja manja. Slično je i s potencijalnom energijom. No ostaje pitanje: a koje su to dozvoljene putanje na kojima može boraviti elektron? U Keplerovom zakonu imamo dvije varijable  $T$  i  $r$ . Za njihovo određenje treba imati dvije jednadžbe. Bohr je došao do druge jednadžbe smjelom pretpostavkom da kutna količina gibanja elektrona ne može biti kontinuirana nego diskretna, kvantizirana. Metodom pokušaja i pogreške pronašao je da kutna količina gibanja  $J_n = mvr$  može imati samo vrijednosti  $nh/2\pi$ , gdje je  $h$  Planckova konstanta. Dakle, tražena druga jednadžba je

$$m_e v r = m_e \frac{2r\pi}{T} r = \frac{nh}{2\pi}$$

Iz nje slijedi

$$T = m_e 4\pi^2 \frac{r^2}{hn}$$

Uvrštenjem  $T$  iz ove jednadžbe u Keplerov zakon izlazi za radijus putanje, (s tim da ćemo sve diskretne varijable označiti s malim indeksom  $n$ )

$$r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0}{e^2 \pi m_e} n^2$$

Lako se izračunaju i ostale bitne veličine:  $v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 n h} = \frac{e^2 c}{4\pi\varepsilon_0 n \frac{h}{2\pi} c} = \frac{c\alpha}{n}$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{h}{2\pi} c} = \frac{1}{137}$  konstanta fine strukture, koja se susreće u

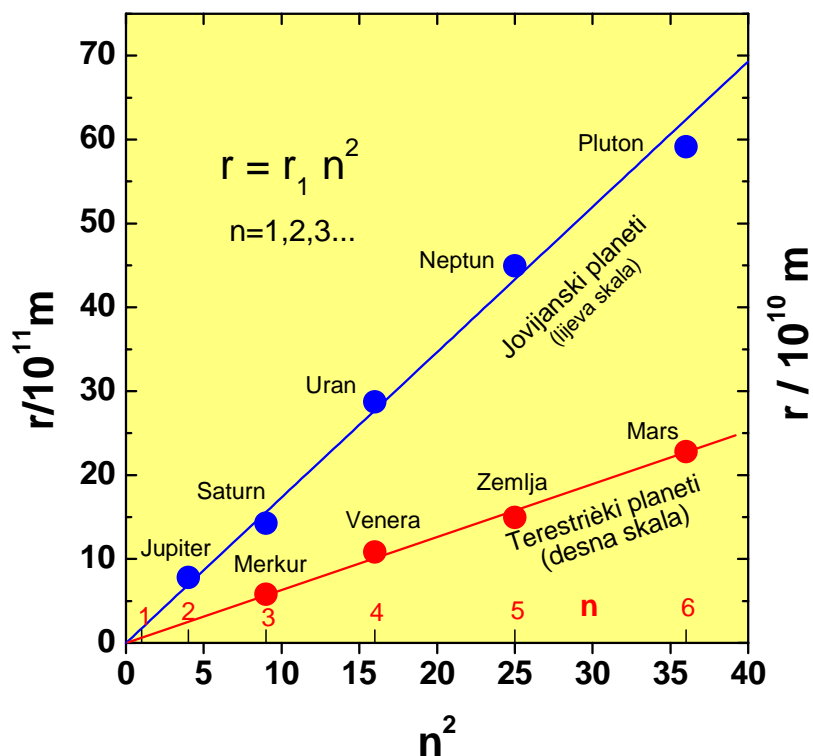
atomske fizici. Za period ophodnje slijedi  $T_n = \frac{4\epsilon_0^2 h^2}{e^4 m_e} n^3$ .

Uočimo da je  $nv_n = c\alpha$  s tim da je  $c\alpha$  konstantna veličina, to znači da je brzina ophođenja  $v_n$  na  $n$ -toj putanji pomnožena s brojem putanje, konstantna veličina. Nadalje, vidljivo je da polumjeri putanja rastu s kvadratom cijelih brojeva

$$r_n = r_1 n^2$$

gdje je  $r_1$  polumjer prve putanje i iznosi  $0.53 \cdot 10^{-10}$  m.

Kao što se vidi iz prikazanog izvođenja Bohr se poslužio s klasičnom fizikom s tim da je uveo naoko nerazumnu pretpostavku o kvantizaciji kutne količine gibanja. No slaganje s eksperimentalnim spektrom je bilo izvanredno točno, a bilo je to teško razumjeti! Tek je kvantna mehanika dala pravilno objašnjenje spektra atoma vodika, i obrazložila Bohrov postupak kvantizacije (Schrodinger, Heisenberg, 1926. god.)



Sl.2 Korelacija orbitalnih radijusa planeta  $r$  i kvadrata cijelog broja  $n$ .

#### 4. KVANTIZACIJA SUNČEVOG SUSTAVA

Vratimo se sada na **gravitacijski sustav**, naš **sunčev sustav**.

Pitanje je da li putanje planeta i satelita slijede kvadratni zakon? Razmotrimo prvo jovijanske planete i Pluton. Kvadratni zakon  $r_n = r_1 n^2$  predstavlja pravac u koordinatnom sustavu  $r_n - n^2$

i taj pravac mora prolaziti ishodištem. Odmah postaje očito da Jupiter mora biti na putanji s  $n=2$ , Saturn na  $n=3$ , Uran na  $n=4$ , Neptun na  $n=5$  i Pluton na  $n=6$  (vidi Sl.2). Linearna regresija daje jednadžbu pravca

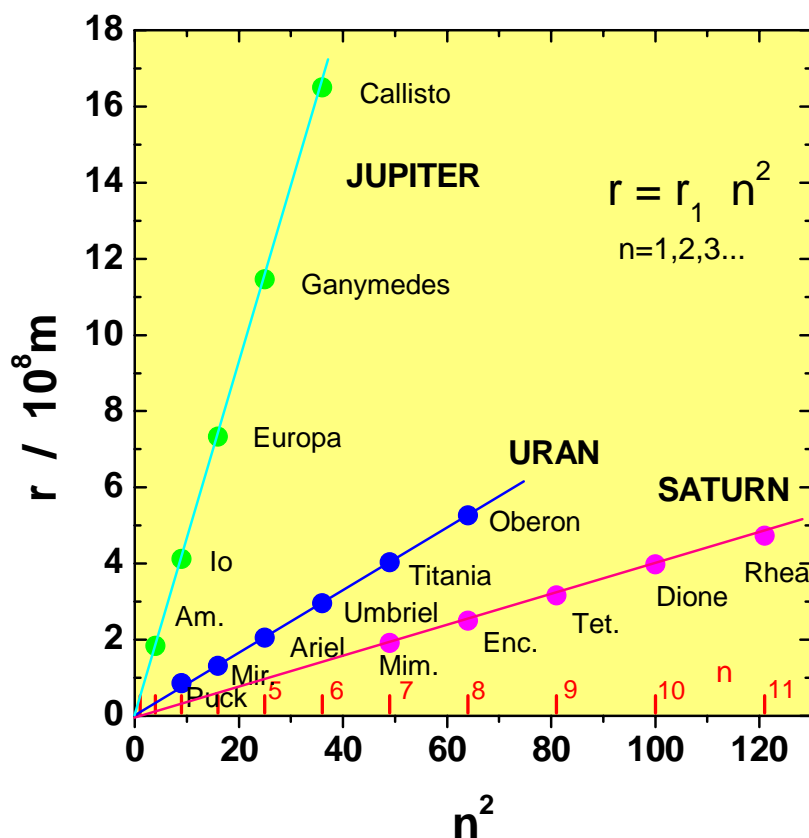
$$r_n = (1.753 \pm 0.114) 10^{11} n^2 \text{ (m)} \quad n=2,3,4,5,6 \quad (\text{Jovijanski planeti})$$

Brojevi orbita  $n$  za sve podsustave u sunčevom sustavu dani su u Tabeli, posljednji stupac.

Umjesto jovijanskog planeta na  $n=1$  smjestili su se terestrički planeti. Centar mase terestričkih planeta nalazi se na udaljenosti od Sunca jednako  $1.38 \cdot 10^{11}$  (m), što je približno jednako  $1.75 \cdot 10^{11}$  (m). Razumljivo je da su terestrički planeti pomaknuti bliže Suncu. Ovi planeti se mogu smatrati kao zasebni sustav. Merkur se nalazi na putanji s  $n=3$ , Venera na  $n=4$ , Zemlja na  $n=5$  i Mars na  $n=6$ . Putanje  $n=1$  i  $n=2$  su nepopunjene (vidi Sl.2). Razlog tomu može biti zbog usporavanja vrtnje Sunca, predavanjem kutne količine gibanja planetima. No blizu Sunca je usporavana i masa u blizini Sunca. Ta smanjena brzina rotacije nije mogla zadovoljiti Keplerov zakon i sva se masa sve do Merkura urušila na Sunce. Linearna regresija daje jednadžbu pravca

$$r_n = (0.638 \pm 0.022) 10^{10} \text{ (m)} \quad n=3,4,5,6 \quad (\text{Terestrički planeti})$$

Nadalje treba provjeriti i satelitske sustave planeta. Uzimaju se u obzir samo glavni sateliti. Zbog toga su nekoliko početnih putanja nepopunjene, što je posljedica jakih plimnih sila, koje do Rocheove granice (približno 2.5 radiusa planeta) onemogućuju postojanje velikih satelita. Unutar Rocheove granice postoje planetarni prsteni, a daleko od planeta mogu se naći mali sateliti što su vjerojatno uhvaćeni asteroidi. Na Sl.3 opaža se lijepo slaganje eksperimentalnih podataka s pravcima.



Sl.3 Korelacija orbitalnih radijusa  $r$  satelita matičnih planeta i kvadrata cijelog broja  $n$ .

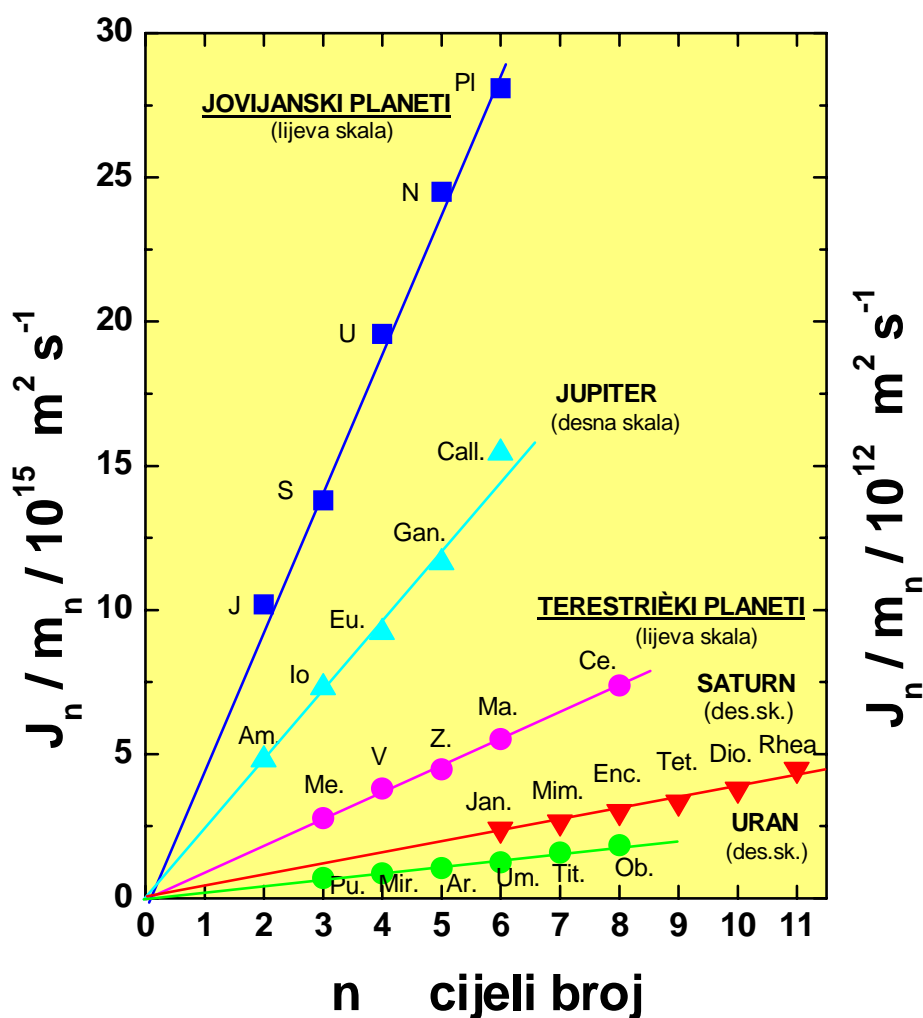
Sljedeći zadatak je provjeriti ponašanje brzine planeta na putanjama i kutne količine gibanja. Kod atoma vodika imali smo samo jedan elektron u obilasku oko protona – jezgre. Kod planetarnog sustava imamo planete različitih masa. Zato je potrebno koristiti specifičnu kutnu količinu gibanja, tj, kutnu količinu gibanja podijeliti s odgovarajućom masom. Najprije odredimo brzine planeta na putanjama

$$v_n = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2r\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Zbog činjenice da je  $r_n = r_1 n^2$

slijedi za brzinu  $v_n = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \frac{1}{n}$  i  $nv_n = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \text{konstanta}$

Dakle, za dani sustav produkt brzine na putanji pomnoženoj s brojem putanje je konstanta veličina. To je u potpunom slaganju s Bohrovim modelom atoma vodika.

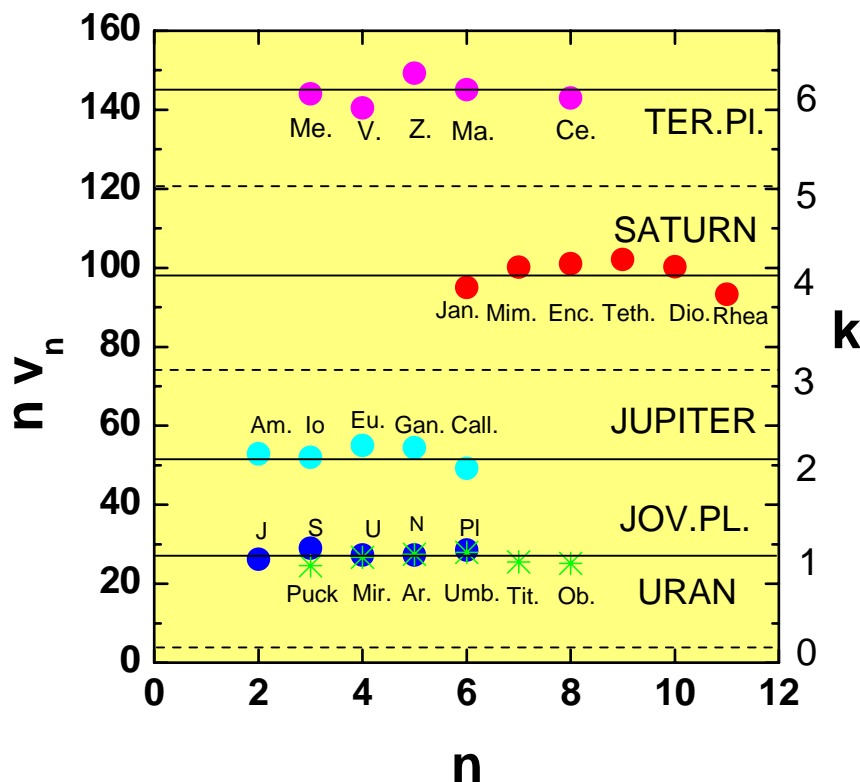


Sl.4 Korelacija specifične kutne količine gibanja  $J_n/m_n$  i cijelog broja  $n$  za planete i satelite.

Specifična kutna količina gibanja je

$$\frac{J_n}{m_n} = v_n r_n = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} r_1 n = \sqrt{GM r_1} n$$

Specifična kutna količina gibanja za dani sustav je proporcionalna broju putanje  $n$ . Na Sl.4 dana je korelacija  $J_n/m_n$  i  $n$ . Lijeva skala na slici odnosi se na jovijanske i terestričke planete, a desna skala na satelite Jupitra, Saturna i Urana. Možemo ustvrditi da je specifična kutna količina gibanja konstanta za svaki podsustav u sunčevom sustavu.



Sl.5 Korelacija produkta brzine  $v_n$  tijela na putanji i broja  $n$ , sa brojem  $n$  i  $k$ .  $n$  određuje broj putanje, a  $k$  definira protežnost (ili prostornost) za podsustave u sunčevom sustavu.

Promotrimo još i zavisnost produkta  $nv_n$  u zavisnosti o  $n$ .

Korelacija je prikazana na Sl.5. Opažamo da je svakom sustavu pridružena određena „stepenica“, (s intervalom od  $v_o = 24 \text{ km s}^{-1}$ ) karakterizirana jednim cijelim brojem  $k$  naznačenim na desnoj strani slike. Zaista je impresivno uočiti kako je Uranov sistem satelita istovjetan sa sustavom jovijanskih planeta. Tako na primjer, za isti  $n = 5$ , Neptun i Ariel imaju jednake ophodne brzine na svojim putanjama. Uranov sustav satelita, možemo smatrati, je, mali jovijanski sustav. To daje snažnu podršku kvantizaciji sunčevog sustava. Terestrički planeti imaju  $k=6$ . Za  $n=1$  ophodna brzina bila bi  $v_1 = 144 \text{ km s}^{-1}$  (period  $T_1 = 3.2$  dana).

Uvođenjem broja  $k$  može se zapisati  $nv_n = kv_o$ .

kao i ostale veličine

$$r_n = \frac{1}{v_o^2} GM \frac{n^2}{k^2} \quad \text{ili} \quad \frac{r_n}{M} = \left( \frac{c}{v_o} \right)^2 \frac{G}{c^2} \left( \frac{n}{k} \right)^2$$



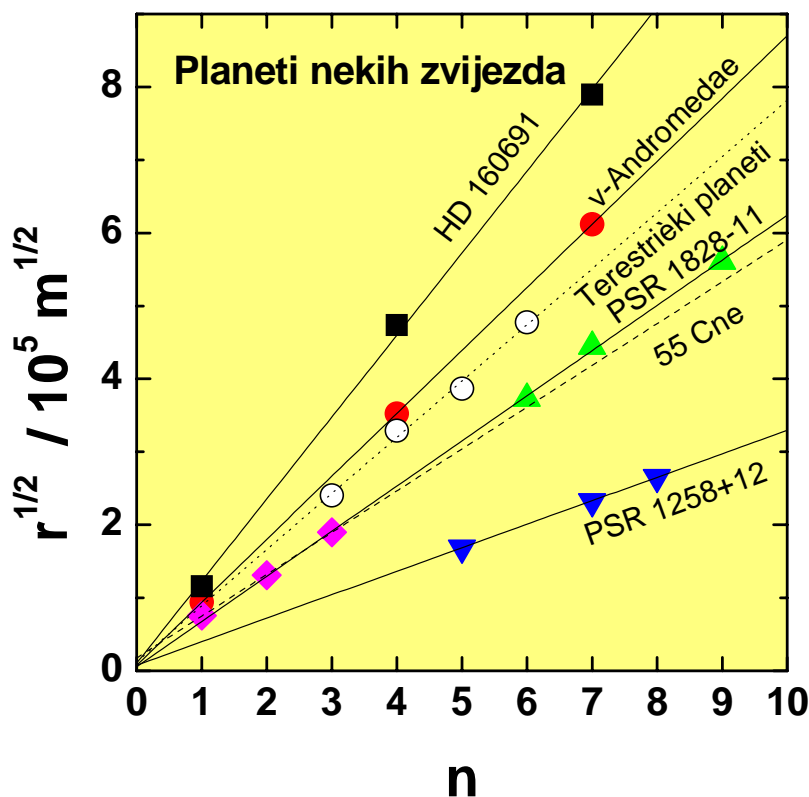
$$\frac{J_n}{m_n} = \frac{1}{v_o^2} GM \frac{n}{k} \quad T_n = 2\pi \frac{1}{v_o^3} GM \left(\frac{n}{k}\right)^3$$

Uvođenjem kvantno-mehaničkih veličina Planckove duljine  $L_P = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}}$

i Planckove mase  $m_P = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}$ , te njihov omjer  $\frac{L_P}{m_P} = \frac{G}{c^2}$  radijusi putanja su dani s

$$\frac{r_n}{M} = \frac{L_P}{m_P} \left(\frac{cn}{v_o k}\right)^2$$

Posljednja formula vrlo lijepo povezuje makroskopske i mikroskopske veličine.

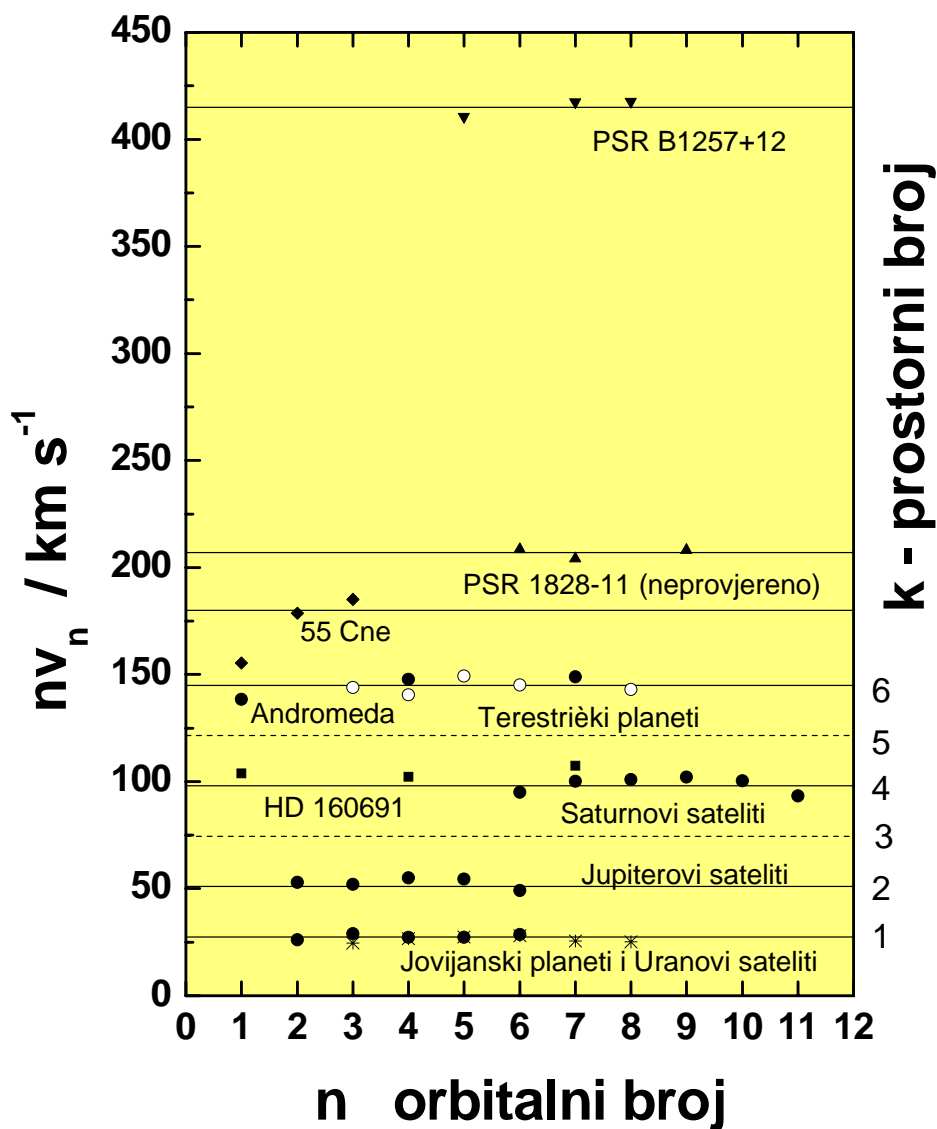


Sl.6 Korelacija drugog korjena radijusa putanja s brojem  $n$  za planete nekih zvijezda. Prikazani su sustavi s tri planeta. Terestrički planeti dodani su radi usporedbe.

U posljednjih desetak godina otkrivaju se planete drugih zvijezda (extra-solar planets). Za sada je otkriveno samo šest sustava, koji imaju po tri planete. Koristeći metodu prikazanu u tekstu može se danim planetima pridružiti cijeli broj, kako je to grafički dano u Sl.6. Tada Sl.5 prelazi u nadopunjenu Sl.7. Planeti  $v$ -Andromedae nalaze se na  $nv_n$  ljestvici zajedno s terestričkim planetima, a planete zvijezde HD 160691 nalaze se sa Saturnovim satelitima. U velikom sadašnjem nastojanju za otkrivanje extra-solarnih planeta, moguće je da će za relativno kratko vrijeme biti skupljeno dovoljno podataka za potvrđivanje iznesenih ideja.

## 5. ZAKLJUČAK I DISKUSIJA

Kopernikov heliocentrički sustav utvrđuje da velika centralna masa, Sunce, drži na okupu planete manje mase u dinamičkom režimu. To omogućuje gravitacijska Newtonova sila. Ova slika se prenosi i na satelite planeta, gdje je sada centralna masa planet. Rutherford zaključuje da je kod atoma centralna teška masa, jezgra, oko koje se opet u dinamičkom režimu gibaju



Sl.7 Korelacija  $nv_n$  sa  $n$  i  $k$  za planete i satelite u sunčevom sustavu i planete nekih zvijezda.

znatno lakši elektroni. To omogućuje Coulombova elektrostatička sila. Bohr koristi Rutherfordov model atoma i na jednostavni model atoma vodika primjenjuje klasičnu mehaniku i neobičnu kvantizaciju kutne količine gibanja. Ova kvantizacija određuje radijuse putanja elektrona i moglo bi se reći da je to IV. Keplerov zakon. Povratak na gravitacijski sustav bio bi analogan Bohrovom postupku kvantizacije kutne količine gibanja. Samo zbog različitih masa treba koristiti specifičnu kutnu količinu gibanja. Prikazani rezultati ohrabruju, ali se ipak ne može govoriti o IV. Keplerovom zakonu, kao strogom zakonu, jer zbog različitih dodatnih uvjeta u gravitacijskim sustavu dolazi do promjene inače strogo definiranih veličina. Međusobno djelovanje planeta, iako relativno slabo u usporedbi sa djelovanjem

planeta sa Suncem, dovodi do perturbacija putanja, javljaju se rezonancije u ophodima planeta što mijenja parametre putanja, sudari sa stranim tijelima dovode do neuobičajenih efekata, plimne sile razaraju veće satelite unutar Rocheove granice, magnetske interakcije dovode do prijenosa kutne količine gibanja, plimna sila, na primjer, djeluje na mjesec tako da ga udaljuje od Zemlje, a Zemlja usporava svoju kutnu brzinu. Sve to dovodi do odstupanja od eventualno dobro definiranih zakonitosti. Doista je začudno da slika, koja je prikazana u ovom zapisu, ima svoju unutarnju konzistentnost. Proširenje Bohrove slike vodikovog atoma na atom s dva elektrona nije moguće, jer elektroni se međusobno odbijaju s približno istim silama kao što su privlačeni k jezgri i klasična fizika nije primjenljiva. Atomički svijet može se razumjeti samo pomoću kvantne mehanike, mehanike mikrosvijeta. U vezi sunčevog sustava prigovori znanstvenika se bezrezervno odnose na kvantizaciju u klasičnoj mehanici, tj, da nije moguća kvantizacija putanja u Newtonovoj mehanici. To je naravno točno. Međutim, kvantizacija ili možda bolje rečeno diskretizacija klasičnih veličina u sunčevom sustava se uočava. Možda bi se moglo naslutiti, ali mnogo teže dokazati da gravitacijski sustav u nastajanju polazi od molekula plinova u prvobitnoj sunčevoj maglici. Kada je centralno tijelo u stadiju formiranja okolne molekule, kao kvantne čestice moguće su podvrgnute kvantnoj gravitacijskoj mehanici, pa se okupljaju oko posebno odabranih putanja. Na taj bi se način mikroskopske informacije prenijele i na velike gravitacijske sustave. No za sada to nije moguće dokazati. Postoje i klasične teorije nastanka gravitacijskih sustava bez korištenja kvantno mehaničkih fenomena, pa pitanja ostaju otvorena. Poneki problemi dugo čekaju na svoja rješenja, ali potraga za rješenjima je izazov, koji obogaćuje fiziku i izgrađuje ljepotu fizičkog nazora na svijet. Podsjetimo se samo na to da je dimenzija atoma reda veličine  $10^{-10}$  m, a masa  $10^{-27}$  kg, dok je sunčev sustav reda veličine  $10^{13}$  m i  $10^{30}$  kg. Period kruženja elektrona prema Bohru je oko  $10^{-16}$  s, a period Neptuna, na primjer, je oko  $10^{10}$  s. Ipak postoji zajednička predodžba o ta dva toliko različita sustava. Takve impresivne analogije nadahnjuju ljubitelje fizike i astronomije na neumorna, uvijek nova istraživanja. Napomenimo još da će nam otkrivanje planeta drugih zvijezda u svemiru dati još mnogo iznenađenja i uzbuđenja i to ne samo na polju astrofizike.